

**Université Ibn Khaldoun**  
**Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénieur**  
**Département informatique**  
**Deuxième année licence informatique LMD**  
**Module : Logique mathématique**

**Calcul des prédicats ( Partie I)**

**1- Introduction**

La logique des prédicats prolonge la logique propositionnelle par la prise en compte des notions de variables et de quantification.

**Remarque :**

La logique des propositions est adaptée à la modélisation des objets individuels alors que la logique des prédicats est dédiée à la représentation des connaissances et des raisonnements sur des classes structurées d'objets.

**Exemple**

César est un dictateur  
Marcus est un républicain  
Les républicains haïssent les dictateurs.

Ecriture avec des prédicats :

Dictateur( César)

Republicain (Marcus)

$\forall x \forall y [ [ \text{Republicain}(x) \wedge \text{Dictateur}(y) ] \rightarrow \text{Hait}(x,y) ]$

**2- Langage des prédicats**

**(a) Alphabet**

Soient K, F et E trois ensembles finis ou dénombrables de symboles. L'alphabet du langage formel  $L1(K,F,E)$  est constitué de ces trois ensembles, appelés symboles spécifiques du langage et d'un ensemble G de symboles généraux du langage de premier ordre.

L'ensemble G de la logique de prédicats regroupe :

- les 5 connecteurs logiques  $\neg, \leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee$  de la logique des propositions
- deux quantificateurs
  - o quantificateur universel  $\forall$
  - o quantificateur existentiel  $\exists$
- un ensemble denombrables X de symboles désignant des variables généralement notés  $x,y,z, \dots$
- les parenthèses ouvrantes, fermantes et la virgule.

**Remarque 1 :**

- Les constantes ou éléments de K sont notés a,b,c, ...
- Les fonctions ou éléments de F ou éléments de F sont notés f,g,h, ...

- Les prédicats ou éléments de E sont notés P,Q,R, ...

**Remarque 2 :**

K et F peuvent être vides et E jamais vide.

**Remarque 3 :**

A tout symbole de fonctions ou prédicats est associé un nombre appelé arité.

**Exemple 1 :**

Le langage arithmétique est défini par :

$$K = \{ 0 \}$$

$$F = \{ s, +, * \}$$

$$E = \{ = \}$$

- 0 : constante unique désigne le nombre zéro
- Les fonctions éléments de F sont la succession des nombres entiers avec une arité 1, l'addition et la multiplication avec une arité 2.
- Le prédicat E est unique est l'égalité d'arité 2.

**Exemple 2**

Le langage de description des graphes est défini comme suit :

$$K = F = \emptyset$$

$$E = \{ \text{arc, chemin} \}$$

Les prédicats de Arc et Chemin sont d'arité 2.

**Exemple 3 : Zoologie**

- Les éléphants à grandes oreilles sont des éléphants d'Afrique
- Un éléphant a grandes défenses si ses parents sont d'Afrique
- Les parents d'un éléphant à grandes oreilles ont de grandes oreilles

$$K = F = \emptyset$$

$$E = \{ \text{Afrique, GrandesOreilles, GrandesDefenses, Parent} \}$$

Les trois prédicats Afrique, GrandesOreilles, GrandesDéfenses sont d'arité 1 et Parent d'arité 2.

**(b) Termes et formules atomiques**

Les formules atomiques sont des formules structurées à l'aide des prédicats de E et de termes qui sont soit des constantes, soit de variables, soit l'image par une fonction de constantes et de variables.

**Exemple 1**

Dans le langage arithmétique, les suites de symboles suivants sont des termes : 0, x, s(0), s(s(0)), +(x,y), \*(x,y), +(x,s(0))

On note 1 pour  $s(0)$ , 2 pour  $s(s(0))$ ,  $x+y$  pour  $+(x,y)$ ,  $x*y$  pour  $*(x,y)$

### Exemple 2

Le langage Graphe ne comporte pas de constante ni de fonctions, ses seuls termes sont les variables.

### Définition :

On appelle formule atomique de  $L^1(K,F,E)$  toute suite de symboles de la forme  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , où  $P$  est un prédicat d'arité  $n$  et  $t_1, t_2, \dots, t_n$  des termes de  $L^1(K,F,E)$ .

### ( c ) Formules quelconques

Les formules quelconques sont obtenus par induction sur la base de formules atomiques ; les règles d'induction sont les suivantes :

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des suites finies de symboles de l'alphabet et si  $x$  est un élément de  $X$  :

- $P_{\neg}(A_1)$  est la suite de symboles :  $(\neg A_1)$
- $P_{\vee}(A_1, \dots, A_n)$  est la suite de symboles  $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n)$
- $P_{\wedge}(A_1, \dots, A_n)$  est la suite de symboles  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$
- $P_{\leftrightarrow}(A_1, A_2)$  est la suite de symboles  $(A_1 \leftrightarrow A_2)$
- $P_{\rightarrow}(A_1, A_2)$  est la suite de symboles  $(A_1 \rightarrow A_2)$
- $P_{\forall}(x, A_1)$  est la suite de symboles  $(\forall x A_1)$
- $P_{\exists}(x, A_1)$  est la suite de symboles  $(\exists x A_1)$

### Exemple 1 :

Dans le langage Graphe, les suites de symboles suivants sont des formules

- 1)  $\forall x (\forall y ( \text{Arc}(x,y) \rightarrow \text{Chemin}(x,y)))$   
*Recherche chemin graphe*
- 2)  $\forall x (\forall z (\exists y ((\text{chemin}(x,y) \wedge \text{Arc}(y,z) \rightarrow \text{Chemin}(x,z))))$
- 3)  $\neg(\exists x ( \text{Chemin}(x,x)))$   
*Absence de circuit*

### Exemple 2 :

Soit un prédicat  $P$  d'arité 2 et  $Q$  un prédicat d'arité 1.

Les suites de symboles sont des formules :

- (1)  $[ \forall x P(x,y) ] \rightarrow [ \neg Q(y) ]$
- (2)  $\forall x [ P(x,y) \rightarrow ( \neg Q(y) ) ]$
- (3)  $[ \exists x P(x,y) \rightarrow ( \neg Q(y) ) ]$

Si  $P(x,y)$  signifie «  $x$  est ami de  $y$  »

Et  $Q(y)$  signifie que «  $y$  est solitaire »

$x,y$  des variables décrivant l'humanité alors les formules précédentes signifient respectivement :

(a) si tout homme est ami d'un homme  $y$ , alors  $y$  n'est pas solitaire

(b) pour tout homme  $x$ , si  $x$  est un ami d'un homme  $y$ , alors  $y$  n'est pas solitaire

( c ) s'il existe un homme  $x$  qui est un ami d'un homme  $y$ , alors  $y$  n'est pas solitaire

**Remarque :**

Bien que  $Q(y)$  ne dépende pas de  $x$ , les formules (a) et (b) ont un sens différent. Par contre, les formules (b) et (c) quoique syntaxiquement différentes, ont le même sens.

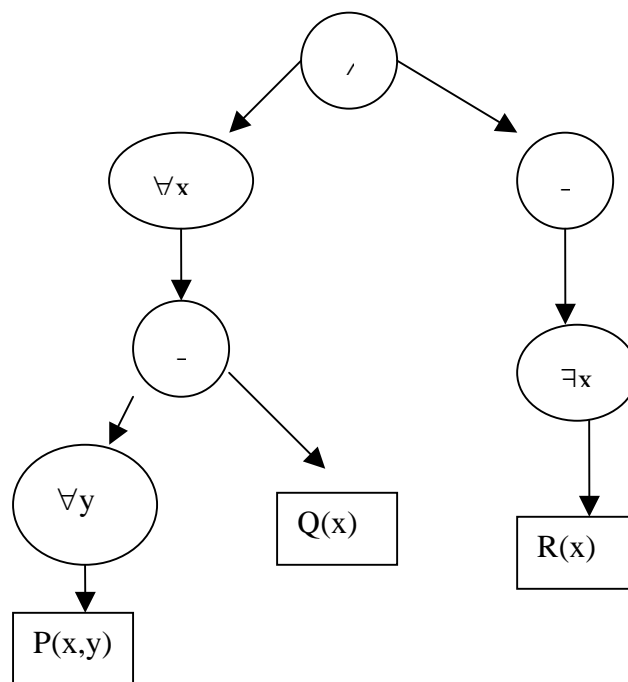
**Exemple 3 :**

- Les éléphants à grandes oreilles sont des éléphants d'Afrique  
 $\forall x [\text{GrandesOreilles}(x) \rightarrow \text{Africain}(x)]$
- Un éléphant a de grandes défenses si ses parents sont d'Afrique  
 $\forall x [\forall y (\text{Parent}(x,y) \rightarrow \text{Africain}(y)) \rightarrow \text{GrandesDéfenses}(x)]$
- Les parents d'un éléphant à grandes oreilles ont de grandes oreilles  
 $\forall x \forall y [(\text{Parent}(x,y) \wedge \text{GrandesOreilles}(x)) \rightarrow \text{GrandesOreilles}(y)]$

**(d) Représentation arborescente des formules**

La représentation de formules est définie comme suit :

- les nœuds correspondent aux connecteurs logiques : Un unaire et Quatre binaires ;
- les feuilles de l'arbre sont des formules atomiques structurées ;



$$\forall x [(\forall y P(x,y) \rightarrow Q(y)) \wedge (\neg \exists x R(x))]$$

## Calcul des prédicats ( Partie II)

### I- Exemple

Soit à traduire le groupe de phrases suivantes :

- Marcus était un homme
- Marcus était un pompéin
- Tous les pompéins étaient des romains
- César était souverain
- Tous les romains étaient fidèles à César, soit le haïssaient
- Chacun est fidèle à quelqu'un
- Les gens n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles
- Marcus a essayé d'assassiner César

### Solution

#### Les prédicats

HOMME(x) : x est un homme

POMPEIN(x) : x est un pompéin

SOUVERAIN(x) : x est un souverain

ROMAIN(x) : x est romain

PERSONNE(x) : x est une personne

FIDELE(x,y) : x est fidèle à y

HAIR(x,y) : x hait y

ESSAYER\_ASSASSINER(x,y) : x essaye d'assassiner y

#### Constantes :

-Marcus

- César

- HOMME(Marcus)
- POMPEIN(Marcus)
- $\forall x (POMPEIN(x) \rightarrow ROMAIN(x))$
- SOUVERAIN(Cesar)
- $\forall x (ROMAIN(x) \rightarrow FIDELE(x) \vee HAIR(x,César))$
- $\forall x \exists y FIDEL(x,y)$
- $\forall x \forall y (PERSONNE(x) \wedge SOUVERAIN(x) \wedge ESSAYER_ASSASSINER(x,y) \rightarrow \neg FIDELE(x,y))$
- ESSAYER\_ASSASSINER(Marcus,Cesar)

### II- Variables libres et variables liées

#### Définition 1 :

Dans les formules ( $\forall x A$ ) et ( $\exists x A$ ), la sous formule A est appelé champ du quantificateur de variable x.

#### Définition 2 :

Une variable x dans une formule est appelée variable liée si elle a au moins une occurrence dans le champ d'un quantificateur de variable x (occurrence liée)

#### Définition 3 :

Une variable  $x$  dans une formule est appelée variable libre si elle a au moins une occurrence hors de tout champ de quantificateur de variable  $x$  (occurrence libre)

**Remarque :**

Le champ d'un quantificateur est le sous-arbre ayant pour sommet le nœud associé à ce quantificateur.

**Définition 4 :**

Une formule est dite fermée si elle ne contient pas de variable libre

**III- Substitution et généralisation**

**Définition :**

Soit  $A(x)$  une formule où  $x$  est une variable libre. Si  $t$  est un terme, on note  $A(t)$  la formule obtenue par substitution de  $t$  à toute occurrence libre de la variable  $x$ .

**Exemple :**

$$A(x,y) = (\forall x P(x,y) \wedge Q(x))$$

Le terme  $t = f(x,y)$

La substitution du terme  $t$  à la variable  $x$  de  $A$  est :

$$A(t,y) = [\forall x P(x,y) \wedge Q(f(x,y))]$$

**Définition 5**

Un terme  $t$  est dit libre pour une variable  $x$  libre dans une formule  $A$  si la substitution de  $t$  à  $x$  dans  $A$  n'y introduit pas d'occurrences supplémentaires de variable liées.

**Définition 6 :**

On appelle généralisation d'une formule  $A$  toute formule de la forme  $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$  où  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des variables quelconques figurant ou non dans  $A$ .

**IV- Axiomes de la logique de prédicats**

**(i) Axiome de spécialisation**

Soit une formule  $A$ , dans laquelle  $x$  est une variable libre et un terme  $t$  libre pour  $x$  dans  $A(x)$

$$[\forall x A(x)] \rightarrow A(t)$$

**Exemple**

Pour  $A(x) = \forall y R(x,y)$

L'axiome de spécialisation s'écrit :

$$[\forall x \forall y R(x,y)] \rightarrow \forall y R(t,y)$$

A condition que  $t$  soit libre pour  $x$  dans  $A(x)$ , c'est-à-dire l'occurrence de  $t$  ne doit pas contenir la variable  $y$ .

**(ii) L'axiome d'élimination de quantificateurs**

Soit  $A$  une formule dans laquelle  $x$  n'est pas une variable libre alors la formule  $(\forall x A) \leftrightarrow A$

**(iii) Axiome de distributivité du quantificateur universel**

Pour tout couple de formule  $A$  et  $B$  la formule

$$[\forall x (A \rightarrow B)] \rightarrow [(\forall x A \rightarrow \forall x B)]$$

#### (iv) Axiome de définition du quantificateur existentiel

Pour toute formule A, la formule  $(\exists x A) \leftrightarrow \neg (\forall x (\neg A))$

#### V- Forme normale prenex

##### Définition :

Une formule en logique de prédicats est dite en forme prenex (fnp) si et seulement si elle est de la forme :

$(Q_1 x_1) (Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n) M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ou chaque  $Q_i x_i$  est soit  $\forall x_i$  ou  $\exists x_i$  et M est une formule contenant aucun quantificateur.

##### Exemple

- $\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$  :fnp
- $\forall x \exists y \forall z (P(x) \wedge \neg Q(y,z) \wedge P(f(y)))$  :fnp
- $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y,x)$  : n'est pas une fnp

### Méthode de transformation d'une formule en logique de prédicats en fnp

#### 1- Eliminer les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

- $(G \leftrightarrow F) \equiv (G \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow G)$
- $(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$

#### 2- Accoler les connecteurs $\neg$ aux atomes

- $\neg(G \neg) \equiv G$
- $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$
- $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$
- $\neg((\exists x) P(x)) \equiv (\forall x) \neg P(x)$
- $\neg((\forall x) P(x)) \equiv (\exists x) \neg P(x)$

#### 3 – Rebaptiser les variables liées si nécessaire de sorte que chaque quantificateur gouverne une variable originale

- $(\forall x) P(x) \equiv (\forall y) P(y)$
- $(\exists x) P(x) \equiv (\exists y) P(y)$

#### 4- Déplacer tous les quantificateurs à gauche de la formule (sans changer l'ordre relatif)

$$((Q_1 x) F(x)) \vee ((Q_2 x) H(x)) \equiv ((Q_1 x) (Q_2 x)) (F(x) \vee H(x))$$
$$((Q_1 x) F(x)) \wedge ((Q_2 x) H(x)) \equiv ((Q_1 x) (Q_2 x)) (F(x) \wedge H(x))$$

#### VI- Transformation de Skolem

Elle consiste à introduire de nouveaux symboles de fonctions pour chaque quantificateur existentiel  $\exists$ .

**Intuitivement**, si pour chaque  $x_i$ , il existe  $y$  tel qu'une propriété  $R(x,y)$  soit vérifiée, alors on peut introduire une fonction  $f(x) = y$  telle que pour tout  $x$ ,  $R(x,f(x))$  est vérifiée

##### Exemple

$$\forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y)) = \forall x (\neg P(x) \vee Q(f(x)))$$